

**2014**

**DEEC – Área Científica de Telecomunicações**  
**Instituto Superior Técnico**

**Propagação & Antenas**  
**Prof. Carlos R. Paiva**

# **INTRODUÇÃO AOS GUIAS DE ONDA**

Nestes apontamentos faz-se uma pequena *introdução* ao estudo dos *guias de onda*. Consideram-se, apenas, os casos mais simples do ponto de vista geométrico.

---

Todas as estruturas são rectangulares – no sentido em que, para a aplicação das condições fronteira, o sistema de coordenadas mais apropriado é o das coordenadas cartesianas rectangulares  $(x, y, z)$ . Além disso, a estrutura do guia é sempre *uniforme e ilimitada* ao longo da coordenada  $y$ . As ondas electromagnéticas propagam-se, longitudinalmente, no sentido positivo do eixo  $z$ . Desprezam-se as perdas (quer nos condutores quer nos dieléctricos) e, portanto, a constante de propagação longitudinal  $\beta$  é real e positiva. A variação temporal adoptada é do tipo  $\exp(-i\omega t)$ . Assim, todas as componentes do campo electromagnético têm o seguinte factor de propagação:

$$\exp[i(\beta z - \omega t)].$$

Note-se que o que se mede *directamente*, no laboratório, são quantidades reais (e não números complexos). Assim, subentende-se – sempre – que as grandezas mensuráveis correspondem à parte real. Por exemplo: quando se escreve

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x) \exp[i(\beta z - \omega t)],$$

onde o vector  $\mathbf{E}(x) \in \mathbb{C}^3$  é um vector complexo, com

$$\mathbf{E}(x) = E_x(x) \mathbf{e}_1 + E_y(x) \mathbf{e}_2 + E_z(x) \mathbf{e}_3,$$

subentende-se que, na realidade, se tem

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \Re \left\{ \mathbf{E}(x) \exp[i(\beta z - \omega t)] \right\} \\ &= \left[ E'_x(x) \cos(\beta z - \omega t) - E''_x(x) \sin(\beta z - \omega t) \right] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left[ E'_y(x) \cos(\beta z - \omega t) - E''_y(x) \sin(\beta z - \omega t) \right] \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left[ E'_z(x) \cos(\beta z - \omega t) - E''_z(x) \sin(\beta z - \omega t) \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

em que, com  $\mathbf{E}'(x), \mathbf{E}''(x) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}'(x) + i \mathbf{E}''(x) = \left[ E'_x(x) + i E''_x(x) \right] \mathbf{e}_1 + \left[ E'_y(x) + i E''_y(x) \right] \mathbf{e}_2 + \left[ E'_z(x) + i E''_z(x) \right] \mathbf{e}_3.$$

Isto significa que a *velocidade de fase* é

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{\beta}} \mapsto \beta z - \omega t = \beta \left( z - \frac{\omega}{\beta} t \right) = \beta (z - v_p t), \quad \beta z - \omega t = -\omega \left( t - \frac{\beta}{\omega} z \right) = -\omega \left( t - \frac{z}{v_p} \right).$$

No caso da *propagação no vácuo*, tem-se simplesmente

$$\boxed{\beta = k_0} \mapsto \boxed{k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Seja  $\lambda$  o comprimento de onda medido no vácuo e  $\lambda_g$  o comprimento de onda dentro do guia, é

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \\ \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} \end{array} \right. \mapsto \boxed{\begin{array}{l} c = \lambda f \\ v_p = \lambda_g f \end{array}}.$$

Define-se, então, o chamado *índice de refração modal* (ou índice de refração efectivo),  $\bar{n}$ , tal que

$$\boxed{\bar{n} = \frac{\beta}{k_0}} \mapsto v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_0} \frac{k_0}{\beta} = \frac{c}{\beta/k_0} \mapsto \boxed{v_p = \frac{c}{\bar{n}}}.$$

Portanto, tem-se

$$\boxed{\lambda_g = \frac{\lambda}{\bar{n}}}.$$

A *velocidade de grupo*, por sua vez, é dada por

$$\boxed{v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}}.$$

Porém, atendendo a que

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d\beta}{dk_0} \frac{dk_0}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d\beta}{dk_0},$$

define-se, ainda, o chamado *índice de grupo*,  $n_g$ , tal que

$$\boxed{n_g = \frac{d\beta}{dk_0}}.$$

Nestas condições, será

$$v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d\beta}{dk_0}} \mapsto \boxed{v_g = \frac{c}{n_g}}.$$

Note-se que, deste modo, se tem (em geral)

$$\boxed{v_p v_g = \frac{c^2}{\bar{n} n_g}}.$$

Tendo em consideração que  $\beta = \bar{n} k_0$ , infere-se que

$$n_g = \frac{d\beta}{dk_0} = \frac{d}{dk_0} (\bar{n} k_0) \mapsto \boxed{n_g = \bar{n} + k_0 \frac{d\bar{n}}{dk_0}}.$$

Como se tem

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \mapsto \frac{d\omega}{dk_0} = c, \quad \frac{d\lambda}{dk_0} = -\frac{2\pi}{k_0^2} = -\frac{\lambda^2}{2\pi},$$

é, ainda,

$$\boxed{n_g = \bar{n} + k_0 \frac{d\bar{n}}{dk_0} = \bar{n} + \omega \frac{d\bar{n}}{d\omega} = \bar{n} - \lambda \frac{d\bar{n}}{d\lambda}}.$$

Mas então, conclui-se que

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \frac{c}{\bar{n} - \lambda \frac{d\bar{n}}{d\lambda}} = \frac{c/\bar{n}}{1 - \frac{\lambda}{\bar{n}} \frac{d\bar{n}}{d\lambda}} \mapsto \boxed{v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\lambda}{\bar{n}} \frac{d\bar{n}}{d\lambda}}}.$$

Esta última expressão mostra que

$$\frac{d\bar{n}}{d\lambda} = 0 \mapsto \boxed{v_g = v_p}.$$

Porém,

$$\frac{d\bar{n}}{d\lambda} < 0 \mapsto 1 - \frac{\lambda}{\bar{n}} \frac{d\bar{n}}{d\lambda} > 1 \mapsto \boxed{v_g < v_p},$$

e, por outro lado,

$$\frac{d\bar{n}}{d\lambda} > 0 \mapsto 1 - \frac{\lambda}{\bar{n}} \frac{d\bar{n}}{d\lambda} < 1 \mapsto \boxed{v_g > v_p}.$$

Define-se o *coeficiente de dispersão* de um guia de ondas como sendo o coeficiente  $D$ , tal que

$$D = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{L}{v_g} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{v_g} \right) \mapsto \boxed{D = -\frac{1}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\lambda}},$$

onde  $\tau_g = L/v_g$  representa o *atraso de grupo* para um guia de comprimento  $L$ . Uma forma alternativa para escrever o coeficiente de dispersão é a seguinte:

$$D = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{v_g} \right) = \frac{1}{c} \frac{dn_g}{d\lambda} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\lambda} \left( \bar{n} - \lambda \frac{d\bar{n}}{d\lambda} \right) \mapsto \boxed{D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2\bar{n}}{d\lambda^2}}.$$

Com efeito, tem-se

$$\frac{dn_g}{d\lambda} = -\lambda \frac{d^2\bar{n}}{d\lambda^2}.$$

As quatro equações de Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases}$$

serão sempre aplicadas, em tudo o que se segue, a regiões sem fontes do campo, i.e., em que se tenham, simultaneamente,

$$\rho = 0, \quad \mathbf{J} = 0.$$

Além disso, admite-se que a variação temporal é (como já se disse atrás), exclusivamente, do tipo  $\exp(-i\omega t)$ .

Daqui decorre, portanto, que se tem

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mapsto -i\omega}.$$

Nestas condições, as quatro equações de Maxwell reescrevem-se na forma simplificada

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \end{cases}$$

Porém, todas as estruturas analisadas nestes apontamentos são ilimitadas e uniformes ao longo de  $y$ . Por essa razão o operador «nabla»

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

reduz-se à forma

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + i \beta \mathbf{e}_3$$

Com efeito, as estruturas também são uniformes e ilimitadas ao longo do eixo  $z$ . A única diferença é que se considera que esta é a *direcção longitudinal de propagação*, i.e., todas as componentes do campo electromagnético variam com a coordenada  $z$  de acordo com a expressão

$$\exp(i \beta z).$$

Logo, é também possível fazer sempre

$$\frac{\partial}{\partial z} \mapsto i \beta,$$

assim se explicando a forma como se escreveu anteriormente o operador  $\nabla$ .

Vejamos, então, como converter as duas equações de Maxwell (dos rotacionais) num conjunto de equações escalares. Seja  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3$  um vector qualquer. Admitamos, ainda, que se tem

$$\begin{cases} A_x(x, y, z, t) = A_x(x) \exp(i \beta z) \exp(-i \omega t) \\ A_y(x, y, z, t) = A_y(x) \exp(i \beta z) \exp(-i \omega t) \\ A_z(x, y, z, t) = A_z(x) \exp(i \beta z) \exp(-i \omega t) \end{cases}$$

de modo que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & i\beta \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (-i\beta A_y) \mathbf{e}_1 + \left( i\beta A_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_3.$$

Ou seja, tem-se:

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{A})_x = -i\beta A_y \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y = i\beta A_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{cases}.$$

Isto implica, portanto, que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}} \quad \mapsto \quad \begin{cases} -i\beta E_y = i\omega B_x \\ i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega B_z \end{cases}$$

e, ainda, que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}} \quad \mapsto \quad \begin{cases} -i\beta H_y = -i\omega D_x \\ i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega D_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega D_z \end{cases}.$$

Todos os meios que se irão considerar nestes apontamentos são meios isotrópicos sem acoplamento magneto-eléctrico. Mais precisamente, supõe-se que todos os meios observam relações constitutivas da forma

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(x) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mu(x) \mathbf{H} \end{cases}$$

mas onde as funções  $\varepsilon(x)$  e  $\mu(x)$  são sempre constantes por troços (ou regiões).

---

Infere-se, assim, que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}} \mapsto \boxed{\begin{aligned} -i\beta E_y &= i\omega \mu_0 \mu(x) H_x \\ i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega \mu_0 \mu(x) H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= i\omega \mu_0 \mu(x) H_z \end{aligned}},$$

pelo que

$$-i\beta E_y = i\omega \mu_0 \mu(x) H_x \Rightarrow \boxed{H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0 \mu(x)} E_y},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega \mu_0 \mu(x) H_z \Rightarrow \boxed{H_z = -i \frac{1}{\omega \mu_0 \mu(x)} \frac{\partial E_y}{\partial x}}.$$

Analogamente, obtém-se

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}} \mapsto \boxed{\begin{aligned} -i\beta H_y &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_x \\ i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_z \end{aligned}},$$

pelo que

$$-i\beta H_y = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_x \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} H_y},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_z \Rightarrow \boxed{E_z = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial x}}.$$

---



Podemos, então, falar em duas classes distintas de soluções: (i) modos TE (*transverse electric*); (ii) modos TM (*transverse magnetic*). No primeiro caso (modos TE) não existe componente longitudinal do campo eléctrico, i.e., tem-se  $E_z = 0$ . No segundo caso (modos TM) não existe componente longitudinal do campo magnético, i.e., tem-se  $H_z = 0$ . Mas, como acabou de se ver, as únicas componentes do campo electromagnético que, nos modos TE, não são identicamente nulas são

$$\mathbf{TE} \rightarrow (E_y, H_x, H_z).$$

No caso dos modos TM, as únicas componentes do campo electromagnético que não identicamente nulas são

$$\mathbf{TM} \rightarrow (H_y, E_x, E_z).$$

No caso dos modos TE foi possível determinar as componentes magnéticas ( $H_x, H_z$ ) em função da componente (dita de) suporte  $E_y$ . No caso dos modos TM foi possível determinar as componentes eléctricas ( $E_x, E_z$ ) em função da componente de suporte  $H_y$ . Resta, em cada caso, determinar as respectivas componentes de suporte: (i)  $E_y$ , nos modos TE; (ii)  $H_y$ , nos modos TM. Para o fazer basta ter em consideração as duas equações ainda não utilizadas.

No caso dos modos TE, tem-se

$$i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_y,$$

$$\therefore i\beta \left[ -\frac{\beta}{\omega \mu_0 \mu(x)} E_y \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ -i \frac{1}{\omega \mu_0 \mu(x)} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right] = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x) E_y.$$

Logo, para cada região em que  $\mu(x)$  é uma constante, obtém-se

$$-\beta^2 E_y + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon(x) \mu(x) E_y.$$

Como

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

é a velocidade da luz (ou da radiação electromagnética) no vácuo (ou, aproximadamente, no ar), podemos escrever (para a constante de propagação no vácuo)

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0},$$

de forma que a equação diferencial para a componente de suporte  $E_y$  é dada por

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \mapsto \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + [n^2(x) k_0^2 - \beta^2] E_y = 0}.$$

Nesta última equação diferencial introduziu-se o *índice de refração*

$$n(x) = \sqrt{\epsilon(x) \mu(x)}$$

de cada região (onde as funções  $\epsilon(x)$  e  $\mu(x)$  assumem valores constantes). Tal como as constantes relativas  $\epsilon(x)$  e  $\mu(x)$ , o correspondente índice de refração  $n(x)$  é um número adimensional. Admite-se que  $\epsilon(x), \mu(x) \in \mathbb{R}$  e, mais precisamente, que  $\epsilon(x) > 0$  e  $\mu(x) > 0$ .

No caso dos modos TM, tem-se

$$i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega \mu_0 \mu(x) H_y$$

$$\therefore i\beta \left[ \frac{\beta}{\omega \epsilon_0 \epsilon(x)} H_y \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ i \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] = i\omega \mu_0 \mu(x) H_y.$$

Logo, para cada região em que  $\epsilon(x)$  é uma constante, obtém-se

$$\beta^2 H_y - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon(x) \mu(x) H_y$$

ou, ainda,

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \mapsto \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + [n^2(x) k_0^2 - \beta^2] H_y = 0}.$$

O objectivo fundamental da análise de um dado *guia de ondas* consiste na determinação da respectiva *equação modal*. É esta equação, que resulta da aplicação das *condições fronteira*, que vai permitir determinar quais as soluções admissíveis (i.e., quais os *modos*) que se podem propagar ao longo da direcção longitudinal (eixo  $z$ ) da estrutura do guia. Basicamente a equação modal diz-nos – para cada valor da frequência – qual o valor da constante de propagação longitudinal  $\beta$  correspondente, i.e., qual o correspondente valor de  $\beta = \beta(\omega)$ .

$$\boxed{\omega} \mapsto \boxed{\text{EQUAÇÃO MODAL}} \mapsto \boxed{\beta}$$

Como  $k_0 = \omega/c$ , este processo (da equação modal) equivale a determinar o índice de refração modal  $\bar{n}$  a partir do conhecimento do valor de  $k_0$ .

$$\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c}} \mapsto \boxed{\text{EQUAÇÃO MODAL}} \mapsto \boxed{\bar{n} = \frac{\beta}{k_0}}$$

### MODOS TE

$$E_z = 0, \quad (E_y, H_x, H_z)$$

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0 \mu(x)} E_y \\ H_z = -i \frac{1}{\omega \mu_0 \mu(x)} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + [n^2(x) k_0^2 - \beta^2] E_y = 0}$$

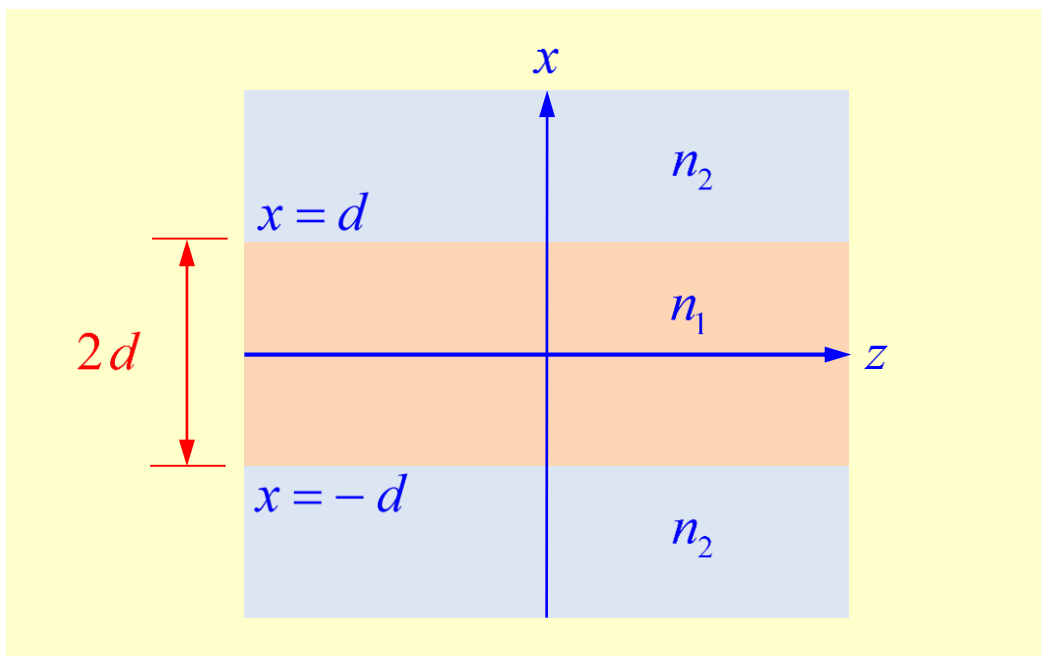
## MODOS TM

$$H_z = 0, \quad (H_y, E_x, E_z)$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} H_y \\ E_z = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + [n^2(x) k_0^2 - \beta^2] H_y = 0}$$

# Placa Dielétrica Simétrica

A placa dielétrica simétrica, que se analisa agora, é um guia aberto. Encontra-se representada na figura anexa.



A placa tem espessura  $2d$  e um índice de refração  $n_1$ . O meio envolvente, por sua vez, tem um índice de refração  $n_2$  (com  $n_2 < n_1$ ). As relações constitutivas podem, então, ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(x) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \mapsto \varepsilon(x) = n^2(x) = \begin{cases} n_1^2, & |x| \leq d, \\ n_2^2, & |x| > d. \end{cases}$$

Neste guia propagam-se modos TE e TM. Para os modos TE as únicas componentes não nulas são  $(E_y, H_x, H_z)$ . Para os modos TM as únicas componentes não nulas são  $(H_y, E_x, E_z)$ . No caso dos modos TE, vem

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} E_y \\ H_z = -i \frac{1}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + [n^2(x) k_0^2 - \beta^2] E_y = 0}$$

enquanto que, para os modos TM,

$$\begin{cases} E_x = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} H_y \\ E_z = i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + [n^2(x) k_0^2 - \beta^2] H_y = 0}.$$

A escrita das equações diferenciais para as componentes de suporte ( $E_y$  nos modos TE e  $H_y$  nos modos TM) fica muito simplificada através da introdução das seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{cases} h^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2 \end{cases} \mapsto \boxed{h^2 + \alpha^2 = (n_1^2 - n_2^2) k_0^2}.$$

Enquanto  $h$  representa a constante de propagação transversal dentro da placa (i.e., para  $-d \leq x \leq d$ ),  $\alpha$  representa a constante de atenuação transversal fora da placa (i.e., para  $x < -d$  e para  $x > d$ ). Assim, e.g., no caso dos modos TE, a equação diferencial para a componente  $E_y$  assume as seguintes formas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + h^2 E_y = 0, & |x| \leq d \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \alpha^2 E_y = 0, & |x| > d \end{cases}$$

dentro e fora da placa dielétrica. Em ambos os casos podemos ensaiar soluções da forma

$$E_y = E_0 \exp(sx) \mapsto \frac{\partial E_y}{\partial x} = s E_0 \exp(sx) \mapsto \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = s^2 E_0 \exp(sx).$$

Logo, dentro da placa, tem-se

$$s^2 E_0 \exp(sx) + h^2 E_0 \exp(sx) = 0 \mapsto s^2 + h^2 = 0 \mapsto \boxed{s = \pm ih}.$$

Por sua vez, fora da placa, vem

$$s^2 E_0 \exp(sx) - \alpha^2 E_0 \exp(sx) = 0 \mapsto s^2 - \alpha^2 = 0 \mapsto \boxed{s = \pm \alpha}.$$

Assim, no interior da placa, o campo eléctrico é uma combinação linear da forma

$$\begin{aligned} E_y &= C_1 \exp(ihx) + C_2 \exp(-ihx) \\ &= C_1 [\cos(hx) + i \sin(hx)] + C_2 [\cos(hx) - i \sin(hx)] \\ &= (C_1 + C_2) \cos(hx) + i(C_1 - C_2) \sin(hx) \end{aligned}$$

ou, introduzindo

$$\begin{cases} A = C_1 + C_2, \\ A' = i(C_1 - C_2), \end{cases}$$

vem, ainda,

$$E_y = A \cos(hx) + A' \sin(hx), \quad -d \leq x \leq d.$$

No exterior da placa, por sua vez, o campo eléctrico é uma combinação linear da forma

$$E_y = B \exp(-\alpha x) + C \exp(\alpha x), \quad |x| > d.$$

Porém, as ondas guiadas pela placa têm de ser *ondas superficiais*. Isto significa que se devem verificar as seguintes condições no infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E_y = \lim_{x \rightarrow -\infty} E_y = 0.$$

Assim, para  $x > d$ , deve ter-se  $C = 0$  e, para  $x < -d$ , deve ter-se  $B = 0$ . Portanto, em síntese, deve ter-se (modos TE):

$$E_y = \begin{cases} B \exp(-\alpha x), & x > d, \\ A \cos(hx) + A' \sin(hx), & -d \leq x \leq d, \\ C \exp(\alpha x), & x < -d. \end{cases}$$

Existe, ainda, uma informação importante acerca da estrutura do guia a ter em consideração: a placa dielétrica é simétrica. Esta informação permite definir duas classes distintas de modos (ou soluções): modos pares e modos ímpares. Definiremos os *modos pares* como aqueles para os quais se tem

$$E_y(-x) = E_y(x).$$

No caso dos *modos ímpares*, considera-se que

$$E_y(-x) = -E_y(x).$$

Consequentemente, no caso dos modos pares, faz-se  $A' = 0$  e, no caso dos ímpares, faz-se  $A = 0$ .

---

Podemos resumir toda esta análise, escrevendo o que se segue.

#### MODOS TE PARES

$$E_y = \begin{cases} B \exp(-\alpha x), & x > d, \\ A \cos(hx), & -d \leq x \leq d, \\ C \exp(\alpha x), & x < -d. \end{cases}$$

#### MODOS TE ÍMPARES

$$E_y = \begin{cases} B \exp(-\alpha x), & x > d, \\ A' \sin(hx), & -d \leq x \leq d, \\ C \exp(\alpha x), & x < -d. \end{cases}$$


---

Como nos modos TE se tem



$$\begin{cases} H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} E_y \\ H_z = -i \frac{1}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

infere-se que

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} \times \begin{cases} B \exp(-\alpha x), & x > d, \\ A \cos(hx), & -d \leq x \leq d, \\ C \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE pares, enquanto que

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} \times \begin{cases} B \exp(-\alpha x), & x > d, \\ A' \sin(hx), & -d \leq x \leq d, \\ C \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE ímpares. De forma análoga, vem

$$H_z = -i \frac{1}{\omega \mu_0} \times \begin{cases} -\alpha B \exp(-\alpha x), & x > d, \\ -h A \sin(hx), & -d \leq x \leq d, \\ \alpha C \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE pares e

$$H_z = -i \frac{1}{\omega \mu_0} \times \begin{cases} -\alpha B \exp(-\alpha x), & x > d, \\ h A' \cos(hx), & -d \leq x \leq d, \\ \alpha C \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE ímpares.

Para determinar a *equação modal* deste guia aberto há que aplicar, de seguida, as condições fronteira. Porém, dada a simetria da estrutura, apenas temos que considerar uma das interfaces, e.g., a interface  $x = d$  (a interface  $x = -d$  levaria a resultados que seriam redundantes). Ora, neste caso, as condições fronteira na interface superior impõem as duas seguintes continuidades (i.e., a continuidade das componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$  e de  $\mathbf{H}$ ):

$$\begin{cases} E_y(x=d^-) = E_y(x=d^+), \\ H_z(x=d^-) = H_z(x=d^+). \end{cases}$$

Vejam, então, quais as *equações modais* que se obtêm pela aplicação destas duas condições. No caso dos modos TE pares, obtêm-se

$$\begin{cases} A \cos(hd) = B \exp(-\alpha d) \\ -hA \sin(hd) = -\alpha B \exp(-\alpha d) \end{cases} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(hd) & -\exp(-\alpha d) \\ -h \sin(hd) & \alpha \exp(-\alpha d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução trivial (i.e., com  $A = B = 0$ ) não tem interesse físico. Apenas nos interessa a solução não trivial. Porém, isso implica o anulamento do determinante da matriz de segunda ordem:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(hd) & -\exp(-\alpha d) \\ -h \sin(hd) & \alpha \exp(-\alpha d) \end{pmatrix} = \alpha \exp(-\alpha d) \cos(hd) - h \exp(-\alpha d) \sin(hd) = 0.$$

Mas então, daqui decorre que deverá ter-se

$$\alpha \cos(hd) = h \sin(hd) \mapsto \boxed{\alpha = h \tan(hd)}.$$

Esta última equação corresponde, portanto, à equação modal dos modos TE pares. De forma análoga, a equação modal dos modos TE ímpares é

$$\boxed{\alpha = -h \cot(hd)}.$$

Para os modos TM a única diferença reside na aplicação das condições fronteira:

$$\begin{cases} H_y(x=d^-) = H_y(x=d^+), \\ E_z(x=d^-) = E_z(x=d^+). \end{cases}$$

As correspondentes equações modais são as seguintes.

$$\begin{cases} \text{Modos TM pares} & \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{n_2^2}{n_1^2} h \tan(hd)} \\ \text{Modos TM ímpares} & \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{n_2^2}{n_1^2} h \cot(hd)} \end{cases}$$

Para facilitar a resolução das equações modais é costume introduzir um conjunto de variáveis normalizadas (adimensionais). A saber:

$$\begin{cases} u = h d \\ w = \alpha d \\ v = k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \end{cases}.$$

Assim, vem

$$\begin{cases} u^2 = n_1^2 k_0^2 d^2 - \beta^2 d^2 \\ w^2 = \beta^2 d^2 - n_2^2 k_0^2 d^2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} u^2 = (k_0 d)^2 (n_1^2 - \bar{n}^2) \\ w^2 = (k_0 d)^2 (\bar{n}^2 - n_2^2) \end{cases} \mapsto \boxed{u^2 + w^2 = v^2}.$$

A variável  $v$  é designada por *frequência normalizada* da placa dielétrica. Também se costuma introduzir a variável  $b$ , que se designa por índice de refração modal normalizado, tal que

$$\boxed{b = 1 - \frac{u^2}{v^2} = \frac{w^2}{v^2} = \frac{\bar{n}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}.$$

Para qualquer modo superficial tem-se

$$\boxed{n_2 k_0 \leq \beta < n_1 k_0} \mapsto \boxed{n_2 \leq \bar{n} < n_1} \mapsto \boxed{0 \leq b < 1}.$$

Com efeito, ao contrário de um guia fechado, o mecanismo de corte num guia aberto – como a placa dielétrica simétrica – é determinado pela *reflexão interna total*. Assim, num guia fechado, o corte corresponde a  $\beta = 0$ . Por sua vez, na placa dielétrica simétrica, o corte corresponde a  $\beta = n_2 k_0$ . À medida que a frequência aumenta, o campo electromagnético fica, cada vez mais, concentrado no interior da placa dielétrica (i.e., na região  $-d \leq x \leq d$ ). Assim, tem-se:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \beta = n_1 k_0 \mapsto \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{n} = n_1 \mapsto \lim_{v \rightarrow \infty} b = 1.$$

Note-se que, dado o valor de  $b$ , vem

$$\begin{cases} u = v \sqrt{1 - b} \\ w = v \sqrt{b} \end{cases}.$$

Com estas variáveis normalizadas adimensionais, as equações modais das quatro classes distintas de modos escrevem-se como se indica de seguida.

Modos <b>TE</b> pares	$\mapsto w = u \tan(u)$
Modos <b>TE</b> ímpares	$\mapsto w = -u \cot(u)$
Modos <b>TM</b> pares	$\mapsto w = \frac{n_2^2}{n_1^2} u \tan(u)$
Modos <b>TM</b> ímpares	$\mapsto w = -\frac{n_2^2}{n_1^2} u \cot(u)$

Do ponto de vista numérico, a resolução de uma dada equação modal corresponde, então, a determinar um dado valor de  $u$  para um certo valor da frequência normalizada  $v$ . O comportamento electromagnético deste guia depende, essencialmente, do contraste dieléctrico entre as duas regiões (interior e exterior da placa). Por essa razão, define-se formalmente o *contraste dieléctrico* como sendo

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2}.$$

Logo, dado que se tem  $\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta}$ , a frequência normalizada da placa pode ser reescrita na forma

$$v = (k_0 d) n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

Assim, tendo em consideração que

$$n_1^2 (k_0 d)^2 = \frac{v^2}{2\Delta} \mapsto u^2 = (n_1^2 - \bar{n}^2) (k_0 d)^2 = \left( \frac{n_1^2 - \bar{n}^2}{n_1^2} \right) \left( \frac{v^2}{2\Delta} \right),$$

infere-se que

$$\bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left( \frac{u}{v} \right)^2}.$$

As duas classes de modos TE (pares e ímpares) podem ser designadas, genericamente, como modos  $TE_m$  desde que se faça: (i)  $m=0, 2, 4, \dots$  (i.e.,  $m$  par), no caso dos modos TE pares; (ii)  $m=1, 3, 5, \dots$  (i.e.,  $m$  ímpar), no caso dos modos TE ímpares. Como

$$\begin{cases} \tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right) = \tan(u), & m \text{ par} \\ \tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(u), & m \text{ ímpar} \end{cases}$$

as duas equações modais das duas classes de modos TE podem ser unificadas na forma

$$\boxed{\text{Modos TE}} \mapsto \boxed{\tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Com efeito, o segundo membro desta equação corresponde a  $w/u$ . Já no caso dos modos TM, a unificação das duas classes de modos corresponde a

$$\boxed{\text{Modos TM}} \mapsto \boxed{\frac{n_2^2}{n_1^2} \tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Estas duas equações unificadas prestam-se a uma interpretação geométrica da determinação da solução das equações modais. Com efeito as soluções gráficas resultam, então, da intersecção entre duas famílias de curvas: (i) as curvas que representam o lado esquerdo,

$$f_m^{\text{TE}}(u) = \tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right), \quad f_m^{\text{TM}}(u) = \frac{n_2^2}{n_1^2} \tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right),$$

para os diferentes valores inteiros (pares e ímpares) de  $m$ ; (ii) a curva que representa o lado direito,

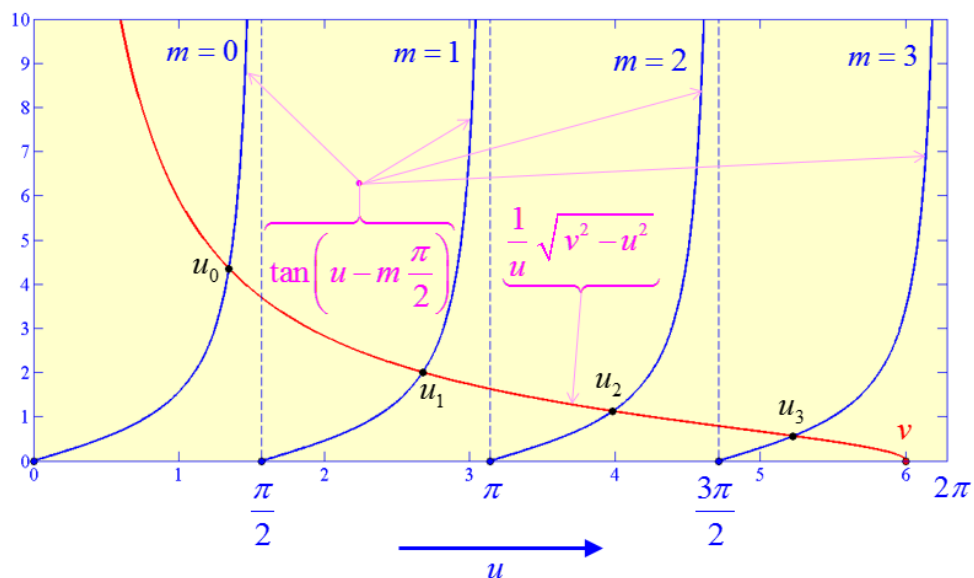
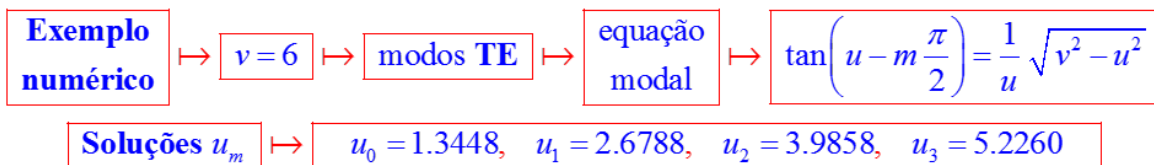
$$g_v(u) = \frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2},$$

para um determinado valor da frequência normalizada  $v$  da placa dielétrica. Então, a solução  $u$  corresponde a ter-se (com  $m=0, 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Modos TE}_m \quad \mapsto \quad f_m^{\text{TE}}(u) = g_v(u), \\ \text{Modos TM}_m \quad \mapsto \quad f_m^{\text{TM}}(u) = g_v(u). \end{array} \right.$$

Na figura anexa, que a seguir se apresenta, ilustra-se um caso concreto desta resolução gráfica. Neste exemplo consideram-se os modos  $\text{TE}_m$  com  $m = 0, 1, 2, 3$  para uma frequência normalizada  $v = 6$ .

## Placa Dielétrica Simétrica



Do ponto de vista estritamente numérico a representação gráfica permite ajudar a localizar a solução pretendida. Por exemplo: o modo  $\text{TE}_0$  tem uma solução  $u_0$  no intervalo

$$0 < u_0 < \frac{\pi}{2}.$$

A corresponde equação modal é

$$\begin{cases} w = u \tan(u) \\ u^2 + w^2 = v^2 \end{cases} \mapsto u^2 + u^2 \tan^2(u) = v^2 \mapsto u^2 \cos^2(u) + u^2 \sin^2(u) = v^2 \cos^2(u)$$

$$\therefore u^2 = v^2 \cos^2(u) \mapsto \boxed{\Phi_v(u) = u^2 - v^2 \cos^2(u) = 0}.$$

Trata-se, portanto, de encontrar a solução  $u_0$  que satisfaz  $\Phi_v(u) = 0$  quando  $v = 6$ . A seguinte instrução MATLAB permite encontrar a solução:

$$u_0 = \text{fzero}('x^2 - 6^2 * \cos(x)^2', 1).$$

Neste caso deu-se uma aproximação inicial:  $u_0 \approx 1$ . O resultado obtido é:  $u_0 = 1.3448$ . Note-se a necessidade de utilizar a variável  $x$  em vez da variável  $u$ . Uma solução alternativa consiste em fornecer o intervalo de pesquisa da raiz. Por exemplo:

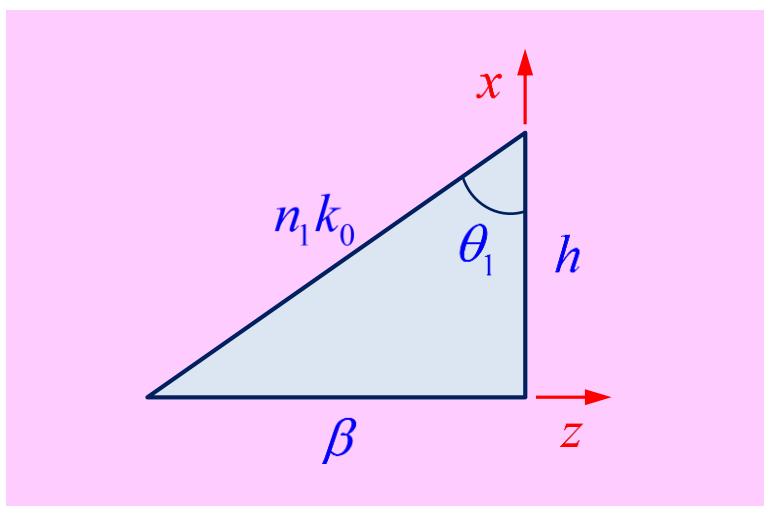
$$u_0 = \text{fzero}('x^2 - 6^2 * \cos(x)^2', [0.5 \ 1.5]).$$

Naturalmente que o resultado é o mesmo.

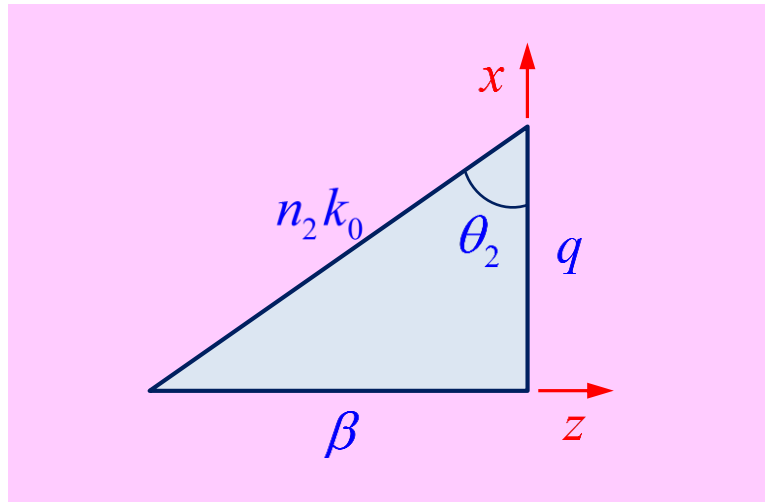
Como se disse atrás, a propagação guiada de ondas electromagnéticas superficiais numa placa dieléctrica simétrica deve-se à reflexão interna total nas duas interfaces entre o núcleo (i.e., o meio 1, no interior da placa) e a bainha (i.e., o meio 2, no exterior da placa). Num meio ilimitado com um índice de refração  $n_1$  a constante de propagação é  $k = n_1 k_0$ . Logo, a constante de propagação (transversal) segundo  $x$  será  $h = k \cos(\theta_1) = n_1 k_0 \cos(\theta_1)$  e a constante de propagação (longitudinal) segundo  $z$  será  $\beta = k \sin(\theta_1) = n_1 k_0 \sin(\theta_1)$ , tendo-se

$$h^2 + \beta^2 = (n_1 k_0)^2$$

tal como se indica na figura seguinte (núcleo).



No meio 2 (a bainha) passa-se algo de semelhante.



Note-se algo de importante: de acordo com a lei de Snell (e, portanto, com as condições fronteira) a constante de propagação longitudinal  $\beta$  é a mesma nas duas últimas figuras (i.e., no núcleo e na bainha). Neste caso, porém, é  $q = n_2 k_0 \cos(\theta_2)$  e  $\beta = n_2 k_0 \sin(\theta_2)$ . Logo

$$q^2 + \beta^2 = (n_2 k_0)^2.$$

Para que haja uma onda superficial, deverá ter-se  $q = i\alpha$ , com  $\alpha > 0$ . Isso só é possível fazendo

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - i\xi \in \mathbb{C}$$

com  $\xi > 0$ . Com efeito, só nestas condições é que

$$\left\{ \begin{array}{l} q = n_2 k_0 \cos(\theta_2) \\ = n_2 k_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\xi\right) \\ = n_2 k_0 \sin(i\xi) \\ = i[n_2 k_0 \sinh(\xi)] = i\alpha \end{array} \right. \quad \mapsto \quad \boxed{q^2 = -\alpha^2} \quad \mapsto \quad \boxed{\alpha = n_2 k_0 \sinh(\xi)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\beta^2 - \alpha^2 = (n_2 k_0)^2}.$$

No corte  $\xi = 0$  e, quando  $v \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow n_1 k_0$  pelo que, consequentemente,

$$\alpha \rightarrow k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad \mapsto \quad \sinh(\xi) \rightarrow \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_2}.$$

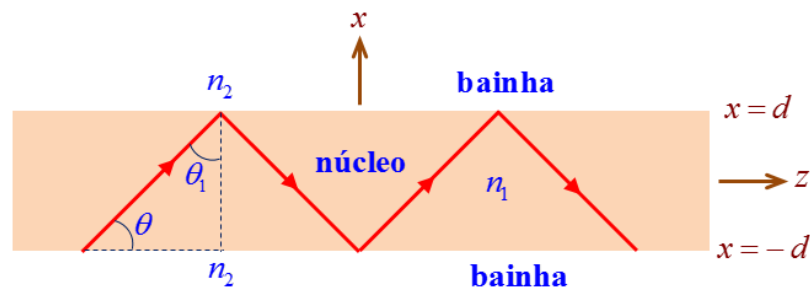


De facto, tem-se

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \mapsto \sin(iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^y) = i \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = i \sinh(y).$$

É claro que a existência de um ângulo  $\theta_2 \in \mathbb{C}$  parece uma hipótese absurda. Mas, na realidade, isto é uma consequência de se ter imposto uma interpretação em termos de raios (óptica geométrica) a uma realidade que é essencialmente ondulatória (óptica ondulatória). O aparecimento de um ângulo complexo é, pois, a consequência de ser ter levado a um extremo uma interpretação (geométrica)

## Placa Dielétrica Simétrica



$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \\ \bar{\theta}_c = \frac{\pi}{2} - \theta_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = n_1 k_0 \cos(\theta_1) = n_1 k_0 \sin(\theta) \\ \beta = n_1 k_0 \sin(\theta_1) = n_1 k_0 \cos(\theta) \end{cases} \& \begin{cases} q = n_2 k_0 \cos(\theta_2) \\ \beta = n_2 k_0 \sin(\theta_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{reflexão interna total}} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} - i\xi \Rightarrow \begin{cases} q = n_2 k_0 \cos(\theta_2) = n_2 k_0 \sin(i\xi) = i n_2 k_0 \sinh(\xi) = i\alpha \\ \beta = n_2 k_0 \sin(\theta_2) = n_2 k_0 \cos(i\xi) = n_2 k_0 \cosh(\xi) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{h^2 + \beta^2 = n_1^2 k_0^2} \quad \& \quad \boxed{\alpha = n_2 k_0 \sinh(\xi)} \quad \& \quad \boxed{\beta^2 - \alpha^2 = n_2^2 k_0^2}$$

para fora do seu âmbito natural de aplicação. Na figura seguinte apresenta-se esta interpretação geométrica, em termos de raios, da propagação guiada na placa dielétrica simétrica.

O corte de um dado modo superficial corresponde, portanto, ao início da reflexão interna total, i.e., quando  $\theta_2 = \pi/2$  e  $\xi = 0$ . Ou seja: o corte acontece para

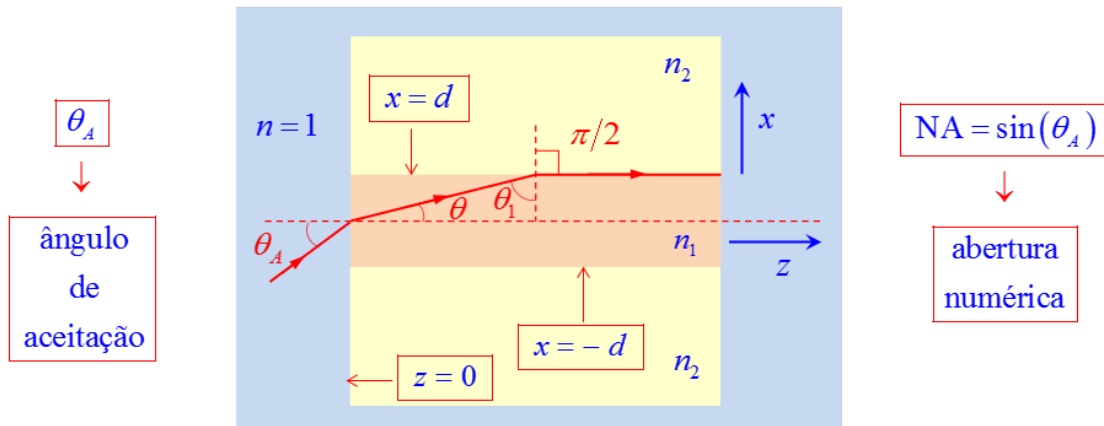
$$\alpha = 0 \mapsto \boxed{w = 0}.$$

Neste caso é  $\beta = n_2 k_0$  (donde  $\bar{n} = n_2$  e  $b = 0$ ). À medida que a frequência normalizada  $\nu$  aumenta, o campo electromagnético começa a concentrar-se dentro do núcleo, aumentando o valor positivo da constante de atenuação transversal  $\alpha$ . A aplicação da lei de Snell permite, também, calcular o

máximo ângulo de aceitação da radiação incidente na placa (supondo que esta tem uma interface lateral em  $z=0$  e é, portanto, semi-ilimitada ao longo da direcção longitudinal de propagação). É o que se apresenta na figura seguinte.

## Placa Dielétrica Simétrica

A propagação de **ondas superficiais** na **placa dielétrica** deve-se à existência de **reflexão interna total** nas interfaces núcleo-bainha.



$$n_1 > n_2 \Rightarrow n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n_2 \Rightarrow \cos(\theta_1) = \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

$$\therefore \text{NA} = \sin(\theta_A) = n_1 \sin(\theta) = n_1 \cos(\theta_1) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

A abertura numérica,  $\text{NA} = \sin(\theta_A) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 \sqrt{2\Delta}$ , aumenta com a raiz quadrada do contraste dielétrico  $\Delta$ . Numa placa dielétrica com pequeno contraste, em que  $\Delta \ll 1$ , os modos superficiais são fracamente guiados pois

$$v = (k_0 d) n_1 \sqrt{2\Delta} = (k_0 d) (\text{NA}) \ll 1,$$

o que significa que  $b$  está próximo de zero.

Na figura seguinte mostra-se um *diagrama de dispersão* i.e., uma figura em que se mostra, de forma sistemática, as soluções das equações modais numa dada gama de variação da frequência normalizada. No caso em análise, trata-se de um gráfico de  $b$  em função de  $v$  para os modos TE no

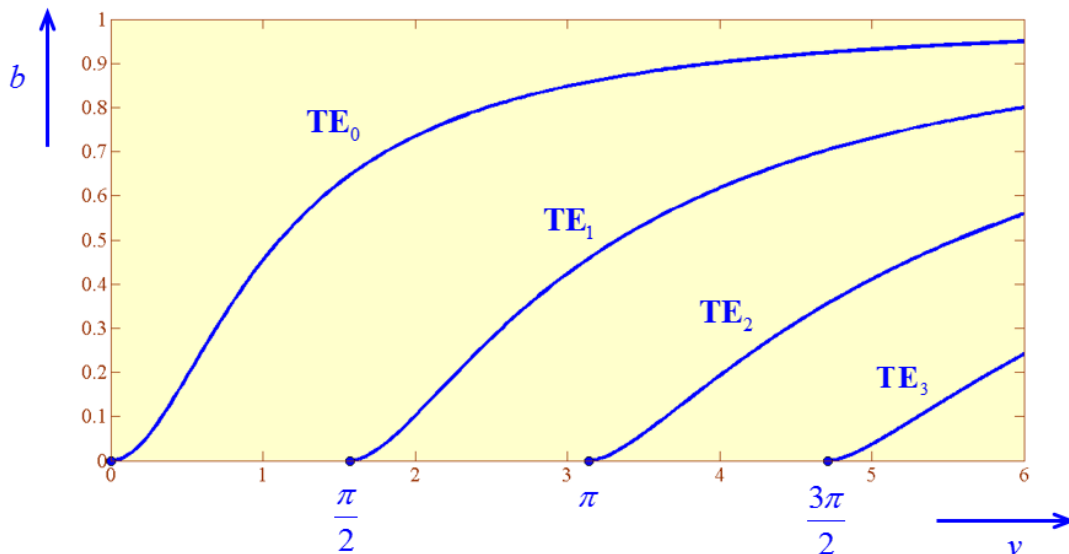
intervalo  $0 \leq v \leq 6$ . Isto significa que cada ponto destas curvas corresponde a uma solução da equação modal

$$\tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2} \quad .$$

## Placa Dielétrica Simétrica

Diagramas de dispersão para os modos superficiais TE da placa dielétrica

$$\tan\left(u - m \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2} \quad \mapsto \quad b = 1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2 = \frac{w^2}{v^2} = \frac{\bar{n}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$$

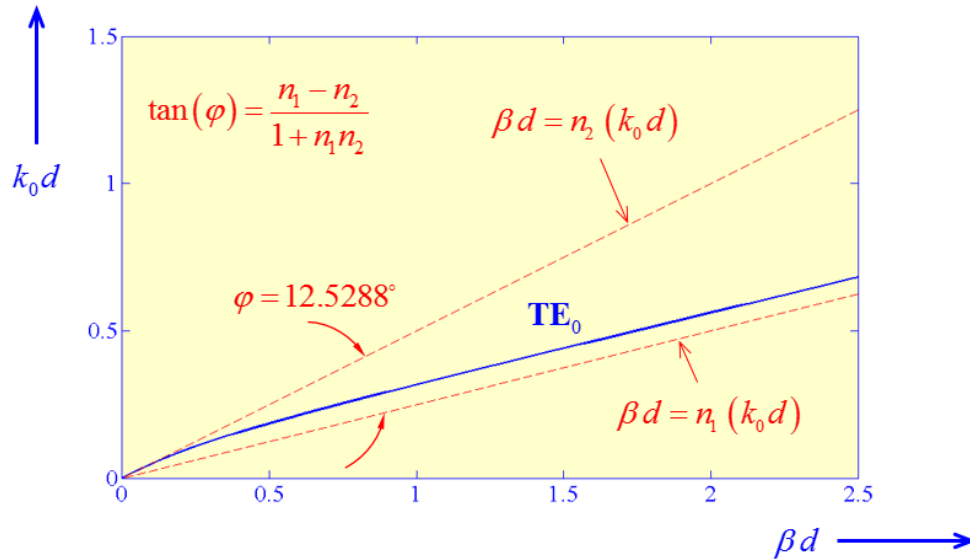


Uma forma alternativa de apresentar as soluções das equações modais consiste numa nova forma de diagrama de dispersão – o chamado *diagrama de Brillouin* (figura seguinte). Este diagrama de dispersão evidencia a influência do contraste dielétrico  $\Delta$  na dispersão estrutural do guia aberto. Com efeito, à medida que o contraste dielétrico diminui ( $\Delta \rightarrow 0$ ), a curva de dispersão estrutural do guia (i.e., a dispersão no caso em que se despreza a componente de dispersão material) tende para uma recta – a linha recta correspondente a  $\beta d = n_1(k_0 d) = n_2(k_0 d)$  pois o ângulo  $\varphi$  (ver figura) tende para zero. Isto significa que o modo TE (ou TM) tende para um modo puramente TEM sem componentes longitudinais, i.e., com  $E_z = H_z = 0$ . Note-se que um modo TEM só existe em meios dielétricos homogêneos – como seria o caso limite de uma placa dielétrica sem contraste dielétrico.

# Placa Dielétrica Simétrica

**Diagrama de Brillouin** para o primeiro modo TE ( $m=0$ ) da placa dielétrica

$$\begin{cases} n_1 = 4 \\ n_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = 0.375 \quad k_0 d = \frac{v}{n_1 \sqrt{2\Delta}} \quad \beta d = \sqrt{\frac{v^2}{2\Delta} - u^2}$$



Note-se que, em relação à figura anterior, se tem

$$\tan(\varphi) = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)}{1 + \tan(\varphi_2) \tan(\varphi_1)}$$

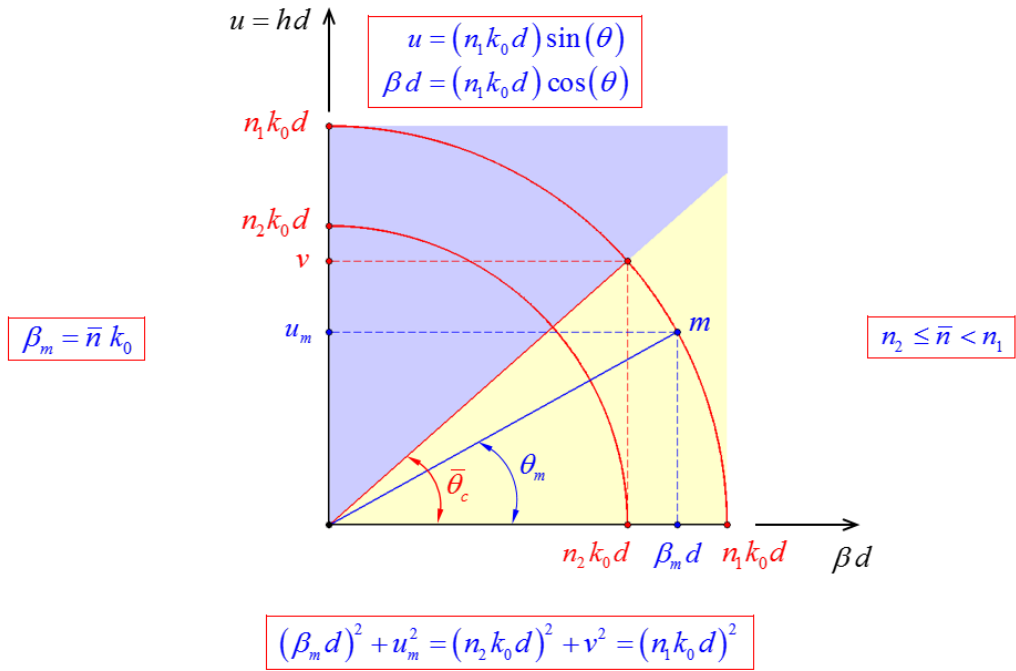
Logo, como  $\tan(\varphi_2) = 1/n_2$  e  $\tan(\varphi_1) = 1/n_1$ ,

vem, efectivamente,

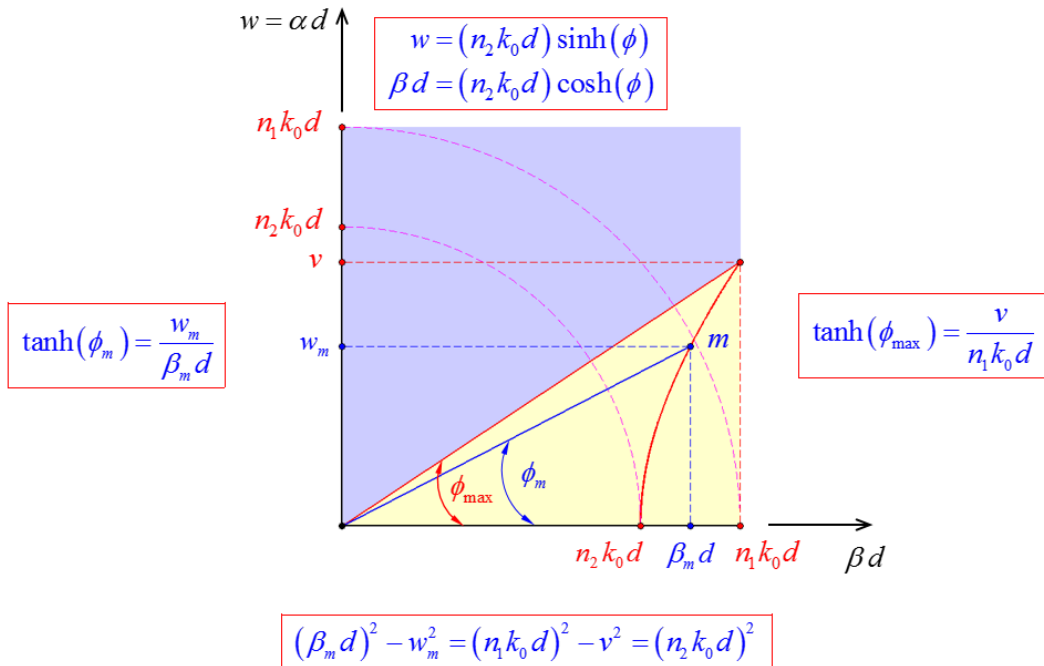
$$\tan(\varphi) = \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 n_2}$$

Portanto:  $\Delta \rightarrow 0$  implica  $\varphi \rightarrow 0$ , tal como se tinha comentado anteriormente. As duas figuras seguintes ajudam a visualizar a gama de variação de  $u$  e  $w$  em termos de  $\beta d$ .

# Placa Dielétrica Simétrica



# Placa Dielétrica Simétrica



A velocidade de grupo  $v_g$  de um dado modo superficial é, por definição,

$$v_g = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial k_0} \frac{\partial k_0}{\partial \omega}}.$$

Logo, como

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \mapsto \frac{\partial k_0}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \mapsto v_g = \frac{c}{\frac{\partial \beta}{\partial k_0}},$$

tem-se, em geral,

$$\boxed{v_g = \frac{c}{n_g}}$$

onde se introduziu o chamado *índice de grupo*  $n_g$  tal que

$$\boxed{n_g = \frac{\partial \beta}{\partial k_0}}.$$

Sendo  $\beta = \bar{n} k_0$ , em que (como se viu)  $\bar{n}$  representa o índice de refração modal, vem então

$$n_g = \frac{\partial}{\partial k_0} (\bar{n} k_0) = \bar{n} + k_0 \frac{\partial \bar{n}}{\partial k_0}.$$

Note-se, porém, que – no caso particular de se desprezar a dispersão material – então ainda se tem

$$v = n_1 k_0 d \sqrt{2\Delta} \mapsto \frac{\partial v}{\partial k_0} = n_1 d \sqrt{2\Delta} = \frac{v}{k_0} \mapsto \frac{\partial \bar{n}}{\partial k_0} = \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial k_0} = \frac{v}{k_0} \frac{\partial \bar{n}}{\partial v},$$

donde se infere que

$$\boxed{n_g = \bar{n} + v \frac{\partial \bar{n}}{\partial v}}.$$

Mas, por outro lado, é

$$b = \frac{\bar{n}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \mapsto \bar{n}^2 = n_2^2 + b(n_1^2 - n_2^2) \mapsto \boxed{\bar{n}^2 = n_2^2 + 2n_1^2 b \Delta}.$$

Logo, quando se despreza a dispersão material, obtém-se

$$2\bar{n} \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} = 2n_1^2 \Delta \frac{db}{dv} \mapsto \boxed{\frac{\partial \bar{n}}{\partial v} = \frac{n_1^2 \Delta}{\bar{n}} \frac{db}{dv}}.$$

Conclui-se, portanto, que – caso se despreze a dispersão material – então

$$n_g = \bar{n} + v \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} \mapsto \boxed{n_g = \bar{n} + \frac{n_1^2 \Delta}{\bar{n}} \left( v \frac{db}{dv} \right)}.$$

Assim, podemos escrever que a velocidade de grupo pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \frac{c}{\bar{n} + \frac{n_1^2 \Delta}{\bar{n}} \left( v \frac{db}{dv} \right)} = \frac{c/\bar{n}}{1 + \Delta \left( \frac{n_1}{\bar{n}} \right)^2 \left( v \frac{db}{dv} \right)} \mapsto v_g = \frac{v_p}{1 + \Delta \left( \frac{n_1}{\bar{n}} \right)^2 \left( v \frac{db}{dv} \right)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{v_p}{v_g} = 1 + \Delta \left( \frac{n_1}{\bar{n}} \right)^2 \left( v \frac{db}{dv} \right)}.$$

Esta expressão mostra como, efectivamente, se tem  $v_g \rightarrow v_p$  no limite em que  $\Delta \rightarrow 0$ .

Vejamos, agora, um primeiro exemplo de aplicação. Consideremos, para o efeito, o caso dos modos TE ímpares, em que

$$\begin{cases} w = -u \cot(u) \\ u^2 + w^2 = v^2 \end{cases} \mapsto \boxed{u^2 = v^2 \sin^2(u)}.$$

Por um lado, infere-se daqui que

$$b = 1 - \left( \frac{u}{v} \right)^2 = 1 - \sin^2(u) \mapsto \boxed{b = \cos^2(u)} \mapsto \frac{db}{du} = -2 \sin(u) \cos(u)$$

$$\therefore \boxed{\frac{db}{du} = -\sin(2u)}.$$

Por outro lado, vem

$$u^2 = v^2 \sin^2(u) \mapsto 2u \frac{du}{dv} = 2v \sin^2(u) + 2v^2 \sin(u) \cos(u) \frac{du}{dv} = 2v \sin^2(u) + v^2 \sin(2u) \frac{du}{dv}$$

$$\therefore [2u - v^2 \sin(2u)] \frac{du}{dv} = 2v \sin^2(u) = v [1 - \cos(2u)] \mapsto \boxed{\frac{du}{dv} = \frac{v [1 - \cos(2u)]}{2u - v^2 \sin(2u)}}.$$

Infere-se, deste modo, que

$$\frac{db}{dv} = \frac{db}{du} \frac{du}{dv} = -\sin(2u) \frac{v[1-\cos(2u)]}{2u-v^2 \sin(2u)} \mapsto \boxed{v \frac{db}{dv} = -\frac{v^2 \sin(2u)[1-\cos(2u)]}{2u-v^2 \sin(2u)}}.$$

Ou seja: tem-se, neste caso,

$$\frac{v_p}{v_g} = 1 + \Delta \left( \frac{n_1}{\bar{n}} \right)^2 \left( v \frac{db}{dv} \right) \mapsto \boxed{\frac{v_p}{v_g} = 1 - \Delta \left( \frac{n_1}{\bar{n}} \right)^2 \frac{v^2 \sin(2u)[1-\cos(2u)]}{2u-v^2 \sin(2u)}}.$$

Vejamos, de seguida, o caso dos modos TM pares, em que

$$\begin{cases} w = (1-2\Delta)u \tan(u) \\ u^2 + w^2 = v^2 \end{cases} \mapsto \boxed{u^2 [\cos^2(u) + (1-2\Delta)^2 \sin^2(u)] = v^2 \cos^2(u)}.$$

Assim, vem

$$\boxed{b = \frac{(1-2\Delta)^2 \sin^2(u)}{\cos^2(u) + (1-2\Delta)^2 \sin^2(u)}} \mapsto \boxed{\frac{db}{du} = \frac{(1-2\Delta)^2 \sin(2u)}{[\cos^2(u) + (1-2\Delta)^2 \sin^2(u)]^2}}.$$

Além disso, tem-se

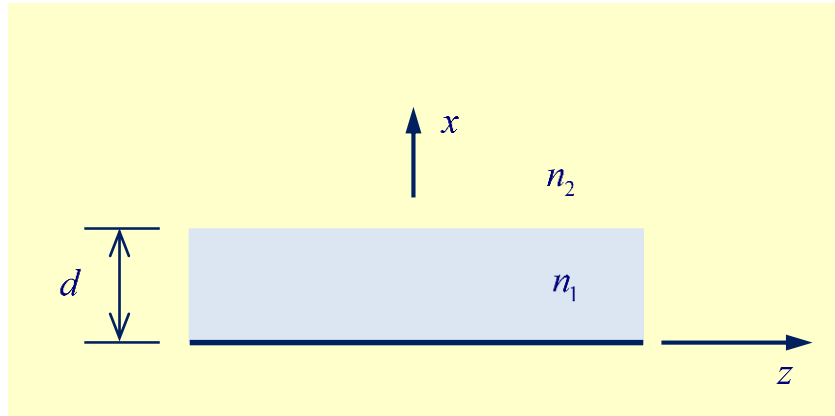
$$\boxed{\frac{du}{dv} = \frac{v[1+\cos(2u)]}{2u[\cos^2(u) + (1-2\Delta)^2 \sin^2(u)] + \sin(2u)\{v^2 - [1-(1-2\Delta)^2]u^2\}}}.$$

Portanto, vem finalmente:

$$\boxed{\frac{v_p}{v_g} = 1 + \Delta \left( \frac{n_1}{\bar{n}} \right)^2 \left[ v \left( \frac{db}{du} \right) \left( \frac{du}{dv} \right) \right]}.$$

Para terminar este breve estudo sobre a placa dielétrica simétrica vai-se considerar, agora, uma nova estrutura: a placa dielétrica assente sobre um plano condutor (elétrico) perfeito ou PEC (*perfect electric conductor*) – tal como se representa na figura seguinte.





Este guia suporta modos superficiais – exactamente como a placa dielétrica simétrica. Existe, porém, uma diferença fundamental: a existência de um PEC no plano  $x=0$ . Consequentemente, a existência de um condutor perfeito neste plano, impõe as seguintes condições fronteira:

$$\boxed{x=0} \mapsto \boxed{E_y = E_z = 0}.$$

Os modos TE pares, com  $E_y \neq 0$  em  $x=0$ , não verificam esta condição. Da mesma forma, os modos TM ímpares, com  $E_z \neq 0$  em  $x=0$ , também violam esta condição. Em conclusão: só os modos TE ímpares e os modos TM pares é que estão de acordo com esta condição suplementar e, portanto, podem propagar-se nesta estrutura; os modos TE pares e os modos TM ímpares, contudo, não se podem propagar neste novo guia aberto.

Vejamos, então, um exemplo concreto. Consideremos que  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$  e  $d = 6.5$  mm. Para uma frequência  $f = 12$  GHz, obtém-se

$$\begin{cases} \lambda = c/f = 2.5\text{cm} \\ \Delta = 0.375 \end{cases} \mapsto v = n_1 k_0 d \sqrt{2\Delta} = 2\pi \frac{d}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta} = 2.8315.$$

Neste caso propagam-se os dois primeiros modos: o modo  $\text{TM}_0$  e o modo  $\text{TE}_1$ . No caso do modo  $\text{TM}_0$  a solução é  $u_0 = 1.4261$ . No caso do modo  $\text{TE}_1$  a solução é  $u_1 = 2.2330$ . Nestas condições, obtêm-se os resultados que se apresentam a seguir.

$$\boxed{\text{TM}_0} \mapsto \begin{cases} \bar{n} = 1.7997 \\ \lambda_g = 13.8814 \text{ mm} \\ v_p = 1.6668 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{TE}_1} \mapsto \begin{cases} \bar{n} = 1.4609 \\ \lambda_g = 17.1011 \text{ mm} \\ v_p = 2.0521 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Calculemos, ainda, a velocidade de grupo do modo  $\text{TE}_1$ . Utilizando, então, a expressão

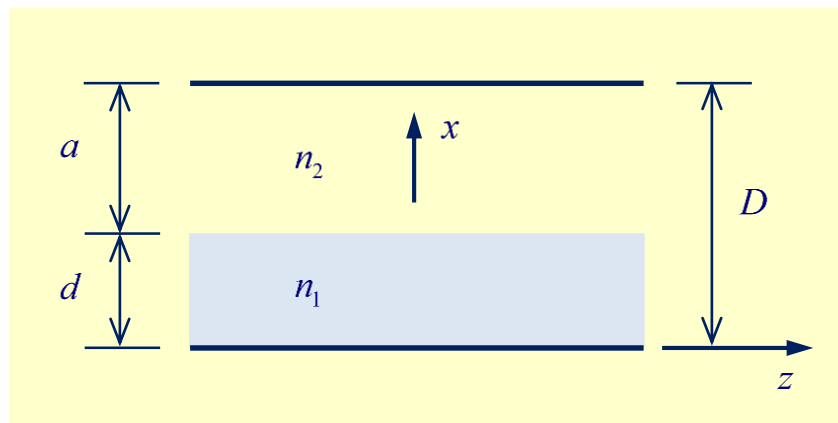
$$n_g = \bar{n} \left[ 1 - \Delta \frac{n_1^2}{\bar{n}^2} \frac{2v^2 \sin(2u) \sin^2(u)}{2u - v^2 \sin(2u)} \right],$$

obtém-se

$$\boxed{\text{TE}_1} \mapsto n_g = \mapsto v_g = .$$

# Placa Dielétrica Blindada

A geometria do guia fechado, sob consideração, encontra-se na figura anexa.



A estrutura encontra-se blindada por dois planos PEC (*perfect electric conductor*) colocados em  $x=0$  e em  $x=D=d+a$ . Trata-se, ainda, de uma estrutura estratificada planar, preenchida por dois dielétricos diferentes: (i) um dielétrico, para  $0 < x \leq d$ , com um índice de refração  $n_1$ ; (ii) um dielétrico, para  $d < x < D$ , com um índice de refração  $n_2$ . Assim, as relações constitutivas escrevem-se

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon(x) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

tendo-se, portanto,

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} n_1^2, & 0 < x \leq d \\ n_2^2, & d < x < D \end{cases}$$

em que se admite que  $n_1 > n_2$ .

Neste guia o campo electromagnético está confinado ao interior da estrutura:  $0 < x < D$ . Existem duas classes de modos guiados: (i) modos TE, com  $E_z = 0$ ; (ii) modos TM, com  $H_z = 0$ . A direcção (longitudinal) de propagação é o sentido positivo do eixo  $z$ . Isto significa que todas as componentes do campo electromagnético têm uma variação da forma

$$\exp[i(\beta z - \omega t)] = \exp(i\beta z) \exp(-i\omega t).$$

Deste modo, podemos escrever

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = \Re \{ E_x(x, y, z) \exp(-i\omega t) \} \\ E_y(x, y, z, t) = \Re \{ E_y(x, y, z) \exp(-i\omega t) \} \\ E_z(x, y, z, t) = \Re \{ E_z(x, y, z) \exp(-i\omega t) \} \\ H_x(x, y, z, t) = \Re \{ H_x(x, y, z) \exp(-i\omega t) \} \\ H_y(x, y, z, t) = \Re \{ H_y(x, y, z) \exp(-i\omega t) \} \\ H_z(x, y, z, t) = \Re \{ H_z(x, y, z) \exp(-i\omega t) \} \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = E_x(x, y) \exp(i\beta z) \\ E_y(x, y, z) = E_y(x, y) \exp(i\beta z) \\ E_z(x, y, z) = E_z(x, y) \exp(i\beta z) \\ H_x(x, y, z) = H_x(x, y) \exp(i\beta z) \\ H_y(x, y, z) = H_y(x, y) \exp(i\beta z) \\ H_z(x, y, z) = H_z(x, y) \exp(i\beta z) \end{cases}$$

Como a estrutura é uniforme e ilimitada ao longo de  $y$ , não deverá existir qualquer variação com esta variável espacial, i.e.,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0}.$$

Mas então, ainda se pode escrever

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = E_x(x) \exp(i\beta z) \\ E_y(x, y, z) = E_y(x) \exp(i\beta z) \\ E_z(x, y, z) = E_z(x) \exp(i\beta z) \\ H_x(x, y, z) = H_x(x) \exp(i\beta z) \\ H_y(x, y, z) = H_y(x) \exp(i\beta z) \\ H_z(x, y, z) = H_z(x) \exp(i\beta z) \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mapsto -i\omega \\ \nabla \mapsto \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + i\beta \mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

Designa-se por  $\beta$  a constante de propagação longitudinal dentro do guia. Como é habitual,  $k_0$  representa – por sua vez – a constante de propagação no vácuo. Tem-se

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

em que  $\lambda$  é o comprimento de onda medido no ar (ou no vácuo) e  $\lambda_g$  o comprimento de onda dentro do guia. Sendo  $v_p$  a velocidade de fase de um dado modo guiado pelo guia, tem-se

$$c = \frac{\omega}{k_0} = \lambda f, \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda_g f$$

pelo que

$$v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda} c.$$

Os modos TE têm, apenas, três componentes do campo electromagnético que não são idênticamente nulas:  $(E_y, H_x, H_z)$ . Por sua vez, os modos TM têm, apenas, três componentes do campo electromagnético que não são idênticamente nulas:  $(H_y, E_x, E_z)$ .

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \begin{cases} H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} E_y \\ H_z = -i \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} H_y \\ E_z = i \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases}$$

As componentes de suporte (i.e., aqueles componentes a partir das quais se determinam as duas outras componentes em cada classe de modos) são, conseqüentemente, as componentes segundo  $y$  :

(i) a componente  $E_y$ , nos modos TE; (ii) a componente  $H_y$ , nos modos TM. Estas componentes de suporte são determinadas pelas equações diferenciais:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [\varepsilon(x) k_0^2 - \beta^2] \right\} \begin{Bmatrix} E_y \\ H_y \end{Bmatrix} = 0.$$

Existem dois tipos de condições fronteira que é necessário ter em consideração: 1) a existência de um PEC quer em  $x=0$  quer em  $x=D$ ; 2) a interface em  $x=d$  que separa dois dielétricos com diferentes índices de refração. Assim, temos de considerar que:

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \begin{cases} 1) \mapsto E_y(x=0) = E_y(x=D) = 0 \\ 2) \mapsto \begin{cases} E_y(x=d^-) = E_y(x=d^+) \\ H_z(x=d^-) = H_z(x=d^+) \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \begin{cases} 1) \mapsto E_z(x=0) = E_z(x=D) = 0 \\ 2) \mapsto \begin{cases} H_y(x=d^-) = H_y(x=d^+) \\ E_z(x=d^-) = E_z(x=d^+) \end{cases} \end{cases}$$

Logo, introduzindo as constantes de propagação segundo  $x$ , a saber:

$$\begin{cases} h^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \\ q^2 = n_2^2 k_0^2 - \beta^2 \end{cases}$$

vem

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow E_y(x) = \begin{cases} A \sin(hx), & 0 < x < d \\ B \sin[q(D-x)], & d < x < D \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow H_z(x) = -i \frac{\beta}{\omega \mu_0} \begin{cases} hA \cos(hx), & 0 < x < d \\ -qB \cos[q(D-x)], & d < x < D \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow H_y(x) = \begin{cases} A \cos(hx), & 0 < x < d \\ B \cos[q(D-x)], & d < x < D \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow E_z(x) = i \frac{\beta}{\omega \epsilon_0} \begin{cases} -\frac{h}{n_1^2} A \sin(hx), & 0 < x < d \\ \frac{q}{n_2^2} B \sin[q(D-x)], & d < x < D \end{cases}$$

Consequentemente, obtém-se

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(hd) & -\sin(qa) \\ h \cos(hd) & q \cos(qa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(hd) & -\cos(qa) \\ -\frac{h}{n_1^2} \sin(hd) & -\frac{q}{n_2^2} \sin(qa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As equações modais resultam de considerar soluções não triviais, i.e., com  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$ , assim impondo o anulamento do determinante nas anteriores equações matriciais.

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal}} \rightarrow \boxed{q \sin(hd) \cos(qa) + h \cos(hd) \sin(qa) = 0}$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal}} \rightarrow \boxed{\frac{q}{n_2^2} \cos(hd) \sin(qa) + \frac{h}{n_1^2} \sin(hd) \cos(qa) = 0}$$

Introduzamos, então, as seguintes variáveis normalizadas (adimensionais):

$$\begin{cases} u = hd \\ s = qd \end{cases} \mapsto \begin{cases} u^2 = n_1^2 k_0^2 d^2 - \beta^2 d^2 \\ s^2 = n_2^2 k_0^2 d^2 - \beta^2 d^2 \end{cases}$$

Logo, sendo  $v$  a frequência normalizada, tal que

$$v = k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2},$$

obtém-se a seguinte relação

$$u^2 - s^2 = v^2 \quad \mapsto \quad s = \sqrt{u^2 - v^2}.$$

Então, introduzindo o coeficiente de preenchimento dielétrico

$$\xi = \frac{a}{d}$$

ainda se tem

$$qa = (qd) \left( \frac{a}{d} \right) = \xi s.$$

Logo, em termos das variáveis adimensionais, infere-se que:

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal}} \rightarrow \boxed{s \cot(\xi s) = -\sqrt{s^2 + v^2} \cot\left(\sqrt{s^2 + v^2}\right)},$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal}} \rightarrow \boxed{s \tan(\xi s) = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{s^2 + v^2} \tan\left(\sqrt{s^2 + v^2}\right)}.$$

Os diagramas de dispersão do guia podem ser representados em termos do chamado índice de refração modal (ou efectivo)  $\bar{n}$ , tal que

$$\bar{n} = \frac{\beta}{k_0}.$$

Então, vem

$$\begin{cases} u^2 = (k_0 d)^2 (n_1^2 - \bar{n}^2) \\ s^2 = (k_0 d)^2 (n_2^2 - \bar{n}^2) \end{cases}$$

Introduzindo o contraste dielétrico  $\Delta$  tal que



$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \mapsto n_2 = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta}$$

é possível reescrever a frequência normalizada  $v$  como segue

$$v = n_1 k_0 d \sqrt{2\Delta} \rightarrow k_0 d = \frac{v}{n_1 \sqrt{2\Delta}}$$

$$\therefore \begin{cases} u^2 = \left( \frac{v}{n_1 \sqrt{2\Delta}} \right)^2 (n_1^2 - \bar{n}^2) \\ s^2 = \left( \frac{v}{n_1 \sqrt{2\Delta}} \right)^2 (n_2^2 - \bar{n}^2) \end{cases} \mapsto \begin{cases} u = \left( \frac{v}{\sqrt{2\Delta}} \right) \frac{\sqrt{n_1^2 - \bar{n}^2}}{n_1} \\ s = \left( \frac{v}{\sqrt{2\Delta}} \right) \frac{\sqrt{n_2^2 - \bar{n}^2}}{n_1} \end{cases} .$$

Note-se que, uma vez conhecido o valor de  $u$  para uma certa frequência normalizada  $v$ , vem

$$\bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left( \frac{u}{v} \right)^2} .$$

O corte de um dado modo guiado é – em regra – dado por  $\beta = 0$  a que corresponde  $\bar{n} = 0$ . Existe uma única exceção: o modo fundamental – o modo  $\text{TM}_0$  – não tem corte. Assim, à exceção do modo fundamental, o corte corresponde a uma frequência normalizada  $v_c$  para a qual se tem

$$k_c d = 2\pi \left( \frac{d}{\lambda_c} \right) = \left( \frac{2\pi d}{c} \right) f_c = \frac{v_c}{n_1 \sqrt{2\Delta}} \rightarrow \begin{cases} u_c = n_1 (k_c d) = \frac{v_c}{\sqrt{2\Delta}} \\ s_c = n_2 (k_c d) = \sqrt{\frac{1 - 2\Delta}{2\Delta}} v_c \end{cases} .$$

Enquanto  $f_c$  representa a frequência de corte,  $\lambda_c$  representa o comprimento de onda de corte. Um dado modo, para o qual de tenha  $\lambda_c f_c = c$ , só se propaga para  $f > f_c$ , i.e., para  $\lambda < \lambda_c$ .

Em conformidade, obtém-se – tanto para os modos TE como para os modos TM – a mesma equação para o corte (note-se que  $n_2/n_1 = \sqrt{1 - 2\Delta}$ ):

$$\text{Corte} \rightarrow v_c = u_c \sqrt{2\Delta} \rightarrow \sqrt{1 - 2\Delta} \tan(u_c) + \tan(\xi u_c \sqrt{1 - 2\Delta}) = 0 .$$

Isto tem um significado especial: a existência de **bifurcação modal**. Desta forma, os modos de propagação  $TE_{2m-1}$  e  $TM_{2m}$ , com  $m=1, 2, 3, \dots$ , têm a mesma frequência normalizada de corte – embora correspondam, depois, a diferentes curvas em termos de diagrama de dispersão.

Para  $\bar{n} = n_2$  é  $s=0$  e dá-se uma transição: (i) para  $\bar{n} < n_2$ ,  $s > 0$ ; (ii) para  $\bar{n} > n_2$ ,  $s = iw$ . Esta transição observa-se para  $v = u = v_t$  tal que:

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \boxed{\text{Frequência normalizada de transição}} \rightarrow \boxed{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s}{\tan(\xi s)} \right] = -v_t \cot(v_t)}$$

Logo, como

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s}{\tan(\xi s)} \right] = \frac{1}{\xi},$$

resulta que

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \boxed{\text{Frequência normalizada de transição}} \rightarrow \boxed{\tan(v_t) = -\xi v_t}.$$

Analogamente, vem (com  $\ell = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \boxed{\text{Frequência normalizada de transição}} \rightarrow \boxed{\tan(v_t) = 0} \rightarrow \boxed{v_t = \ell \pi}.$$

Ou seja, à excepção do modo fundamental  $TM_0$ , todos os modos têm simultaneamente uma zona rápida e uma zona lenta. A saber:

$$\left| \begin{array}{l} v < v_t \mapsto \text{zona rápida} \mapsto 0 < \bar{n} < n_2 \\ v > v_t \mapsto \text{zona lenta} \mapsto n_2 < \bar{n} < n_1 \end{array} \right.$$

A explicação para esta nomenclatura é a seguinte: a velocidade de fase de um dado modo é sempre dada por

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\bar{n} k_0} \rightarrow \boxed{v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda} c = \frac{c}{\bar{n}}} \rightarrow \boxed{\bar{n} = \frac{c}{v_p} = \frac{\lambda}{\lambda_g}}.$$

Acontece que, para  $v = v_t$  é  $\bar{n} = n_2$  e, portanto, vem

$$\boxed{v = v_t} \mapsto \boxed{v_p = \frac{c}{n_2}}.$$

Logo, na zona rápida tem-se

$$\boxed{\text{zona rápida}} \rightarrow \boxed{v_p > \frac{c}{n_2}}.$$

Na zona lenta, porém, tem-se

$$\boxed{\text{zona lenta}} \rightarrow \boxed{\frac{c}{n_1} < v_p < \frac{c}{n_2}}.$$

Na zona lenta de cada modo a equação modal é mais facilmente escrita em termos da variável

$$\boxed{w = \alpha d = k_0 d \sqrt{\bar{n}^2 - n_2^2}} \rightarrow \boxed{w^2 = -s^2} \rightarrow \boxed{u^2 + w^2 = v^2} \rightarrow \boxed{w = \sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Assim, para a zona lenta, é preferível reescrever as equações modais como segue:

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2} \coth(\xi \sqrt{v^2 - u^2}) = -\cot(u)},$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2} \tanh(\xi \sqrt{v^2 - u^2}) = \frac{n_2^2}{n_1^2} \tan(u)}.$$

Na escrita destas equações teve-se em consideração que

$$\tan(ix) = i \tanh(x), \quad \cot(ix) = -i \coth(x).$$

Note-se, ainda, que – ao fazer  $a \rightarrow \infty$  (e, conseqüentemente,  $\xi \rightarrow \infty$ ) – se obtém

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} [\tanh(\xi w)] = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} [\coth(\xi w)] = 1.$$

Assim, infere-se o seguinte: os modos lentos (TE e TM) da placa dielétrica blindada tendem para os modos superficiais da placa aberta quando se faz  $a \rightarrow \infty$ . Mais precisamente

$$\boxed{\text{MODOS TE}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{a \rightarrow \infty} \rightarrow \boxed{w = -u \cot(u)}$$

$$\boxed{\text{MODOS TM}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{a \rightarrow \infty} \rightarrow \boxed{w = \frac{n_2^2}{n_1^2} u \tan(u)}$$

O modo fundamental – o modo  $\text{TM}_0$  – merece especial menção. Este modo tem um comportamento distinto de todos os outros modos. Com efeito, este modo fundamental é um modo sempre lento. Isto significa, em particular, que a equação modal

$$\boxed{\text{Modo Fundamental}} \rightarrow \boxed{\text{TM}_0} \rightarrow \boxed{w \tanh(\xi w) = \frac{n_2^2}{n_1^2} u \tan(u)}$$

é aplicável a este modo independentemente da frequência de operação. Nomeadamente, à medida que a frequência tende para zero, é possível usar as aproximações

$$\tanh(x) \approx x, \quad \tan(x) \approx x,$$

para obter, no limite em que  $k_0 d \rightarrow 0$ ,

$$w \tanh(\xi w) = \frac{n_2^2}{n_1^2} u \tan(u) \rightarrow \xi w^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} u^2 \rightarrow \xi (\bar{n}_0^2 - n_2^2) = \frac{n_2^2}{n_1^2} (n_1^2 - \bar{n}_0^2)$$

$$\therefore \left( \xi + \frac{n_2^2}{n_1^2} \right) \bar{n}_0^2 = (1 + \xi) n_2^2 \rightarrow \bar{n}_0^2 = n_1^2 n_2^2 \frac{1 + \xi}{n_2^2 + \xi n_1^2}$$

em que se fez

$$\boxed{\bar{n}_0 = \lim_{v \rightarrow 0} (\bar{n})}.$$

Portanto, tem-se

$$\boxed{\bar{n}_0 = n_1 n_2 \sqrt{\frac{1 + \xi}{n_2^2 + \xi n_1^2}}}.$$

Isto mostra que

$$\lim_{a \rightarrow 0} (\bar{n}_0) = n_1, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} (\bar{n}_0) = n_2.$$

Portanto, é sempre  $n_2 \leq \bar{n}_0 < n_1$ . Note-se que, no caso em que  $a \rightarrow 0$ , o modo fundamental  $\text{TM}_0$  degenera no modo TEM de uma linha de planos paralelos preenchida por um dielétrico homogéneo com um índice de refração  $n_1$ , tendo-se então  $\bar{n} \equiv n_2$  para todos os valores de  $v \geq 0$ .

### Em síntese

Para um dado modo TE ou TM, o corte corresponde a  $\bar{n} = 0$  e a transição rápido  $\rightarrow$  lento a  $\bar{n} = n_2$ . Quando  $f \rightarrow \infty$  vem  $\bar{n} \rightarrow n_1$ . Para um dado modo rápido a constante de propagação transversal  $s$ , no meio superior (i.e., para  $d < x \leq D$ ), varia no intervalo

$$s_t = 0 \leq s \leq \sqrt{\frac{1-2\Delta}{2\Delta}} \quad v_c = s_c,$$

com

$$n_2 = n_1 \sqrt{1-2\Delta}.$$

A frequência de corte  $v_c$  é a solução da seguinte equação (modos TE e TM):

$$\sqrt{1-2\Delta} \tan(u_c) + \tan(\xi u_c \sqrt{1-2\Delta}) = 0 \quad \mapsto \quad v_c = u_c \sqrt{2\Delta}.$$

Para um dado modo lento a constante de atenuação transversal  $w$  varia no intervalo

$$w_t = 0 \leq w < v = w_\infty.$$

Tem-se  $s^2 = -w^2$ , com

$$\begin{cases} u = \sqrt{s^2 + v^2} \\ w = \sqrt{v^2 - u^2} \end{cases}.$$

As frequências de transição  $v_t$ , em que  $s = w = 0$  e  $u = v$ , são tais que

$$\begin{cases} \text{Modos TE} & \mapsto \tan(v_t) = -\xi v_t \\ \text{Modos TM} & \mapsto v_t = \ell \pi, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \end{cases}.$$

Os modos são designados da seguinte forma.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Modos TE} \mapsto \text{TE}_1, \text{TE}_3, \text{TE}_5, \dots \\ \text{Modos TM} \mapsto \text{TM}_0, \text{TM}_2, \text{TM}_4, \dots \end{array} \right.$$

O primeiro modo – o modo fundamental – é o modo  $\text{TM}_0$ . Este modo é sempre lento. Todos os restantes modos são rápidos para  $v_c < v < v_t$  e lentos para  $v > v_t$ .

Tem-se, ainda,

$$\left[ \begin{array}{l} \bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{u}{v}\right)^2} \\ \bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left[1 + \left(\frac{s}{v}\right)^2\right]} \end{array} \right].$$

As equações modais apresentam-se de seguida.

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{MODOS TE}} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{zona rápida} \mapsto \boxed{s \cot(\xi s) = -\sqrt{s^2 + v^2} \cot\left(\sqrt{s^2 + v^2}\right)} \\ \text{zona lenta} \mapsto \boxed{-\cot(u) = \frac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2} \coth\left(\xi \sqrt{v^2 - u^2}\right)} \end{array} \right. \\ \\ \boxed{\text{MODOS TM}} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{zona rápida} \mapsto \boxed{s \tan(\xi s) = -(1 - 2\Delta) \sqrt{s^2 + v^2} \tan\left(\sqrt{s^2 + v^2}\right)} \\ \text{zona lenta} \mapsto \boxed{\tan(u) = \frac{1}{u} \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{1 - 2\Delta} \tanh\left(\xi \sqrt{v^2 - u^2}\right)} \end{array} \right. \end{array}$$

## Exemplo numérico

Consideremos, a título de exemplo, o seguinte caso concreto:  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1$  e  $\xi = a/d = 2$ . De forma a especificar um determinado valor da frequência normalizada  $v$  vai-se sempre considerar a situação em que  $d = \lambda/4$ .

Nestas condições, vem:

$$v = 2\pi \frac{d}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta} = 1.7562 ,$$

$$\Delta = \frac{5}{18} = 0.277\dots \approx 27.78\% , \quad 2\Delta = \frac{5}{9} , \quad \bar{n}_0 = 1.1078 .$$

A frequência normalizada de corte  $v_c$  dos modos  $TE_1$  e  $TM_2$  (bifurcação modal) é dada por

$$u_c = 1.3846 \mapsto v_c = 1.0320 .$$

Assim, nestas condições, o guia tem um regime de funcionamento monomodal desde que

$$v < v_c = 1.0320 .$$

Os modos são rápidos quando  $\bar{n} < n_2 = 1$  e lentos quando  $\bar{n} > n_2 = 1$ . Por sua vez, a frequência normalizada de transição (da zona rápida para a zona lenta) do modo  $TE_1$  é dada por

$$\sin(v_t) + \xi \cos(v_t) = 0 \mapsto v_t = 1.8366 .$$

Outras frequências de transição apresentam-se a seguir.

$$\left[ \begin{array}{l} TE_3 \mapsto v_t = 4.8158 \\ TE_5 \mapsto v_t = 7.9171 \\ TE_7 \mapsto v_t = 11.0408 \end{array} \right.$$

Já a frequência normalizada de transição do modo  $TM_2$  é simplesmente dada por

$$v_t = \pi = 3.1416 .$$

Estes resultados significam que os modos  $TM_0$ ,  $TE_1$  e  $TM_2$  têm condições de propagação. O índice de refração modal

$$\boxed{\text{Índice de refração modal}} \mapsto \bar{n} = \frac{\beta}{k_0} = \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

do modo fundamental  $TM_0$  (lento) é

$$\boxed{u = 1.1824} \mapsto \bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{u}{v}\right)^2} \mapsto \boxed{\bar{n} = 1.2975}.$$

Por sua vez, o modo  $TE_1$  tem condições de propagação na zona rápida. Por essa razão, vem

$$\boxed{s = 0.3663} \mapsto \bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left[1 + \left(\frac{s}{v}\right)^2\right]} \mapsto \boxed{\bar{n} = 0.9724}.$$

Já os modos  $TM_2$  e  $TE_1$  estão ao corte:  $v = 1.7562 < v_c = 1.9578$ .

Suponhamos, agora, que escolhemos uma **nova** frequência normalizada  $v$  de operação, com

$$\boxed{v = 5}.$$

Determinemos, então, para o conjunto de parâmetros

$$(n_1 = 1.5, n_2 = 1, \xi = 2),$$

a seqüência de frequências (normalizadas) de corte, i.e., as sucessivas raízes  $v_c$  da equação

$$\boxed{\sqrt{1 - 2\Delta} \sin(u_c) \cos(\xi u_c \sqrt{1 - 2\Delta}) + \cos(u_c) \sin(\xi u_c \sqrt{1 - 2\Delta}) = 0} \mapsto \boxed{v_c = u_c \sqrt{2\Delta}}.$$

Obtêm-se, então,

$$\left[ \begin{array}{l} TE_1 \text{ \& } TM_2 \mapsto u_c = 1.3846 \mapsto v_c = 1.0320 \\ TE_3 \text{ \& } TM_4 \mapsto u_c = 2.6267 \mapsto v_c = 1.9578 \\ TE_5 \text{ \& } TM_6 \mapsto u_c = 4.1238 \mapsto v_c = 3.0737 \\ TE_7 \text{ \& } TM_8 \mapsto u_c = 5.3010 \mapsto v_c = 3.9511 \\ TE_9 \text{ \& } TM_{10} \mapsto u_c = 6.7981 \mapsto v_c = 5.0670 \end{array} \right.$$

Neste caso, quais os modos que se propagam? Naturalmente, como se viu, propaga-se – desde logo – o modo fundamental  $TM_0$ . Como se pode ver pela tabela anterior, o par de modos  $TE_9$  e  $TM_{10}$  têm um valor de  $v_c = 5.0670 > v = 5$  pelo que se encontram ao corte. Propagam-se, portanto, 9 modos TE e TM.



A seguir mostra-se o diagrama de dispersão para os modos TM nas condições numéricas aqui consideradas. Ou seja:

$$\begin{cases} n_1 = 1.5 \\ n_2 = 1 \\ \xi = 2 \end{cases} \mapsto \Delta = \frac{5}{18} = 0.2777\dots$$

Considera-se que  $0 \leq v \leq 5$ .

## Diagrama de dispersão dos modos TM

